

Simple Solvency

Ein Solvenzmodell für deutsche
Lebensversicherer

Holger Bartel

03.11.2014

Simple

- Keine Simulation
- Keine Cashflows
- Keine Zeitschrittigkeit

Aber: Komplexe Interaktion der Inputparameter

Solvency

- Orientierung an Solvency II, aber Abweichungen z. B. bei Risikomarge und Surplus Fund
- Ökonomische Marktwertbilanz
- Einjährige Risiken zu 0,5%

Input

Ca. 20 Parameter des Lebensversicherers:

- HGB-Bilanzwerte
- Durationen
- Asset Allocation

Ca. 20 Markt-Parameter:

- Zins
- Volatilitäten

Garantien und Optionen

- Garantie ist finanzmathematisch ein Put
- Geschlossene Formel anstatt Simulation
- Neu: Puffer Put anstatt Austauschoption

Vorteil

- Nutzung der HGB-Puffer
- Optimale Aktienquote und Durationslücke positiv, wie in Realität

SCR Wertschwankungsansatz

- SII-Quote = ASM/SCR
- Wertschwankungsansatz im Holistic Balance Sheet:

$$SCR = -\Delta ASM$$

SCR Multistress

- Ein diversifizierter Multistress anstatt korrelierte Einzelstresse
- Vorteil: keine Mehrfachnutzung der Puffer

- Kapitalanforderung nach Diversifikation

$$\text{SCR}_{\text{Brutto}} = \text{SCR}_{\text{Zins}} + \text{SCR}_{\text{Kredit}} + \text{SCR}_{\text{AI}} \\ + \text{SCR}_{\text{VT}} + \text{SCR}_{\text{Op}}$$

- Diversifizierte Einzelrisiken durch Schrumpfung mit Diversifikationsfaktor

SCR Einzelrisiken

- $SCR_{Zins} = (SCR_{ALM} + SCR_{VNO})^+$
- $SCR_{Kredit} = div \cdot creditrisk_0 \cdot FI_0$
- $SCR_{AI} = div \cdot (airisk \cdot Aktien_0)^+$
- $SCR_{VT} = div \cdot vtrisk \cdot HGBDR \cdot D_{VT,0}$
- $SCR_{Op} = oprisk \cdot HGBDR$

Der Index „0“ steht für die Größe vor Stress

SCR Zins

- ALM-Risiko aus Durationslücke

$$\text{SCR}_{\text{ALM}} = \Delta r \cdot (-\text{Garantie}_0 \cdot D_{\text{VT}}(r_0 + \Delta r) + \text{FI}_0 \cdot D_{\text{FI}}(r_0 + \Delta r))$$

- VN-Option auf Storno / Kapitalabfindung

$$\text{SCR}_{\text{VNO}} = \Delta \text{VNO} \text{ mit}$$

$$\text{VNO} = s \cdot \text{PBWR} \text{ und Stornoquote}$$

$$s = s_{\min} + (s_{\max} - s_{\min}) \cdot N(r; \mu_{\text{VNO}} + \text{mrz}; \sigma_{\text{VNO}}^2)$$

mit Zins steigt s , PBWR, VNO

Zinsprozess

- Vasicek Zinsprozess

$$dr_t = mr \cdot (ufr - r_t) \cdot dt + \sigma_{\text{Vasicek}} \cdot dW_t$$

- Zins r ist normalverteilt, kann negativ werden

- Mean Reversion mr ,
Ultimate Forward Rate ufr

- $\Delta r = \text{div} \cdot (q(r) - r_0)$

mit Quantil $q(r)$

$$= r_0 \cdot e^{-mr} + ufr \cdot (1 - e^{-mr}) \pm 2,58 \cdot \sigma_{\text{Zins}}$$

Aktien- und Immobilienprozess

- geometrische Brownschen Bewegung

$$S_t = e^{m_{\text{Aktie}} \cdot t + \sigma_{\text{Aktie}} \cdot W_t}$$

- $\text{airisk} = 1 - q(S)$

Kreditrisiko Vasicek

- Vasicek Kreditrisikoverteilung

$$\text{default risk} = \text{LGD} \cdot N \left(\frac{N^{-1}(\text{pd}) + \sqrt{\rho_{\text{Kredit}}} \cdot 2,58}{\sqrt{1 - \rho_{\text{Kredit}}}} \right)$$

- Annahme: diversifiziertes Portfolio, mit Ausfallwahrscheinlichkeit pd und Loss Given Default LGD

Kreditrisiko Basel II

- Basel II

$$\text{creditrisk} = \text{defaultrisk} \cdot \text{mf}$$

$$= \text{defaultrisk} + \text{spreadrisk}$$

mit Maturity Faktor

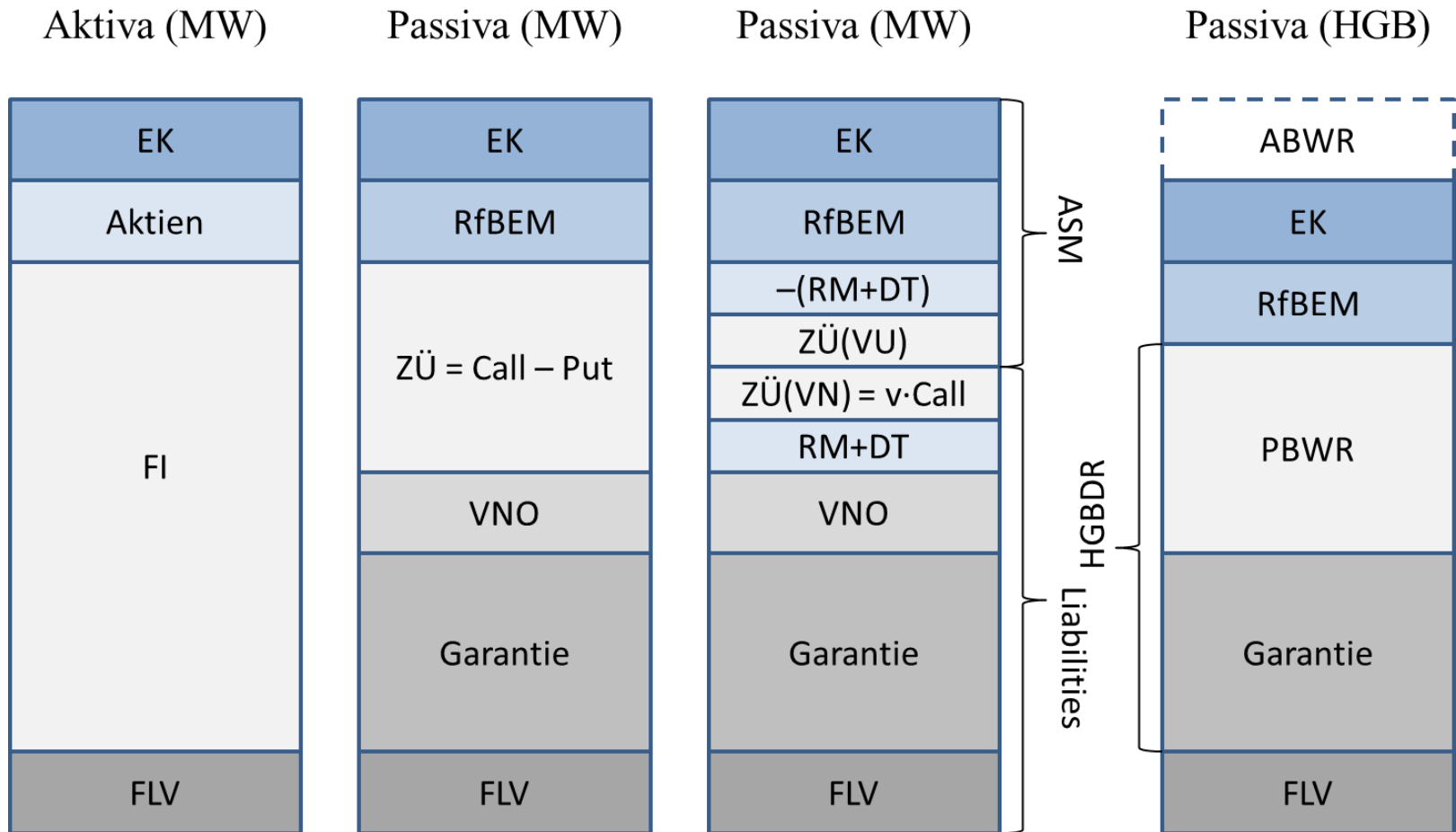
$$\text{mf} = \frac{1 + (\text{rlz} - 2,5) \cdot b}{1 - 1,5 \cdot b}$$

und b abhängig von pd

- Versicherer können den spread verdienen

$$\text{spread} = \text{LGD} \cdot \text{pd} \cdot (\text{mf} - 1)$$

Marktwertbilanz Überblick



Marktwertbilanz

- Assets

= Aktien + FI + FLV + EK

= EK + RfBEM + ZÜ + VNO + Garantie + FLV

= ASM + Liabilities

- Liabilities

= Garantie + FLV + VNO + RM + DT + ZÜ(VN)

Marktwertbilanz

- $ASM = EK + RfBEM + Z\ddot{U}(VU) - RM - DT$
- $EK = EK_0 + INJ$
- $RfBEM = fr. RfB + S\ddot{U}AF$
- $RM = coc \cdot D_{VT} \cdot SCR$
- $DT = \begin{cases} tax \cdot Z\ddot{U}(VU) & \text{wenn } Z\ddot{U}(VU) \geq 0 \\ \frac{tax}{2} \cdot Z\ddot{U}(VU) & \text{wenn } Z\ddot{U}(VU) < 0 \end{cases}$

Marktwertbilanz und HGB-Bilanz

- HGBBS
= EK + RfBEM + HGBDR + FLV
= Assets - ABWR
- HGBDR = Garantie + PBWR
HGBDR ist Garantie zum Zins m_{rZ} - m_{VT}
- ZÜ = ABWR + PBWR - VNO

Marktwertbilanz nach Stress

Wirkung der Risiken auf die gestresste Bilanz

| Kapital-anforderung | Aktiva | Passiva |
|----------------------------|----------------|-----------------------------|
| SCR_{Op} | FI ↓, Aktien ↓ | ZÜ(KA) ↓ |
| SCR_{Zins} | FI ↑ | ZÜ(KA) ↓, Garantie ↑, VNO ↓ |
| SCR_{Kredit} | FI ↓ | ZÜ(KA) ↓ |
| SCR_{AI} | Aktien ↓ | ZÜ(KA) ↓ |
| SCR_{VT} | – | ZÜ(VT) ↓, Garantie ↑, VNO ↓ |

Marktwertbilanz nach Stress

- $Z\ddot{U}(VT) = m_{VT} \cdot HGBDR \cdot D_{VT} - SCR_{VT}$
- $Garantie = Garantie_0 \cdot \frac{D_{VT}}{D_{VT}(r_0)} + SCR_{VT}$
- $FI = FI_0 \cdot \frac{D_{FI}}{D_{FI}(r_0)} - SCR_{Kredit} - (1 - a_0) \cdot SCR_{Op}$
- $Aktien = Aktien_0 - SCR_{AI} - a_0 \cdot SCR_{Op}$
- $Z\ddot{U}(KA) = Z\ddot{U} - Z\ddot{U}(VT)$ als Residuum
- Geringere VNO erhöhen die $Z\ddot{U}(KA)$

Bestandsentwicklung

- Annahme: geometrischer Bestandsabbau mit der konstanten Rate

$$\kappa_{VT} = -\ln \left(1 - \frac{1}{D_{VT}(r_0)} + r_0 \right)$$

- $D_{VT} = \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{VT} + r}}$
- Aktiva analog: κ_{FI} und D_{FI}

Put-Call-Parität

- Allgemein:
$$\text{Underlying} + \text{Put} = \text{Barwert Strike} + \text{Call}$$
- Hier:
$$\text{Underlying} = \text{Aktien} + \text{FI} - \text{RfBEM} - \text{VNO}$$
$$\text{Barwert Strike} = \text{Garantie}$$
- Es folgt Differenzierung nach positiven und negativen Überschüssen:
$$\text{ZÜ} = \text{Call} - \text{Put}$$

Gesamtverzinsung

- $$gvz = \frac{RZ + Z\ddot{U}(VN)}{HGBDR \cdot D_{VT}}$$
$$= mrz + v \cdot \left(m_{VT} - mrz + \frac{KA\text{Ertrag} + \text{Put}}{HGBDR \cdot D_{VT}} \right)$$

mit

$$KA\text{Ertrag} = Z\ddot{U}(KA) + RZ$$

$$RZ = HGBDR \cdot mrz \cdot D_{VT}$$

- $$\Delta gvz \approx \Delta v \cdot \frac{\text{Call}}{HGBDR \cdot D_{VT}}$$

Garantien und Optionen

- Weitere ZÜ-Zerlegungen:

$$Z\ddot{U} = Z\ddot{U}(KA) + Z\ddot{U}(VT)$$

$$Z\ddot{U} = Z\ddot{U}(VN) + Z\ddot{U}(VU)$$

- $v = Z\ddot{U}(VN) / \text{Call}$

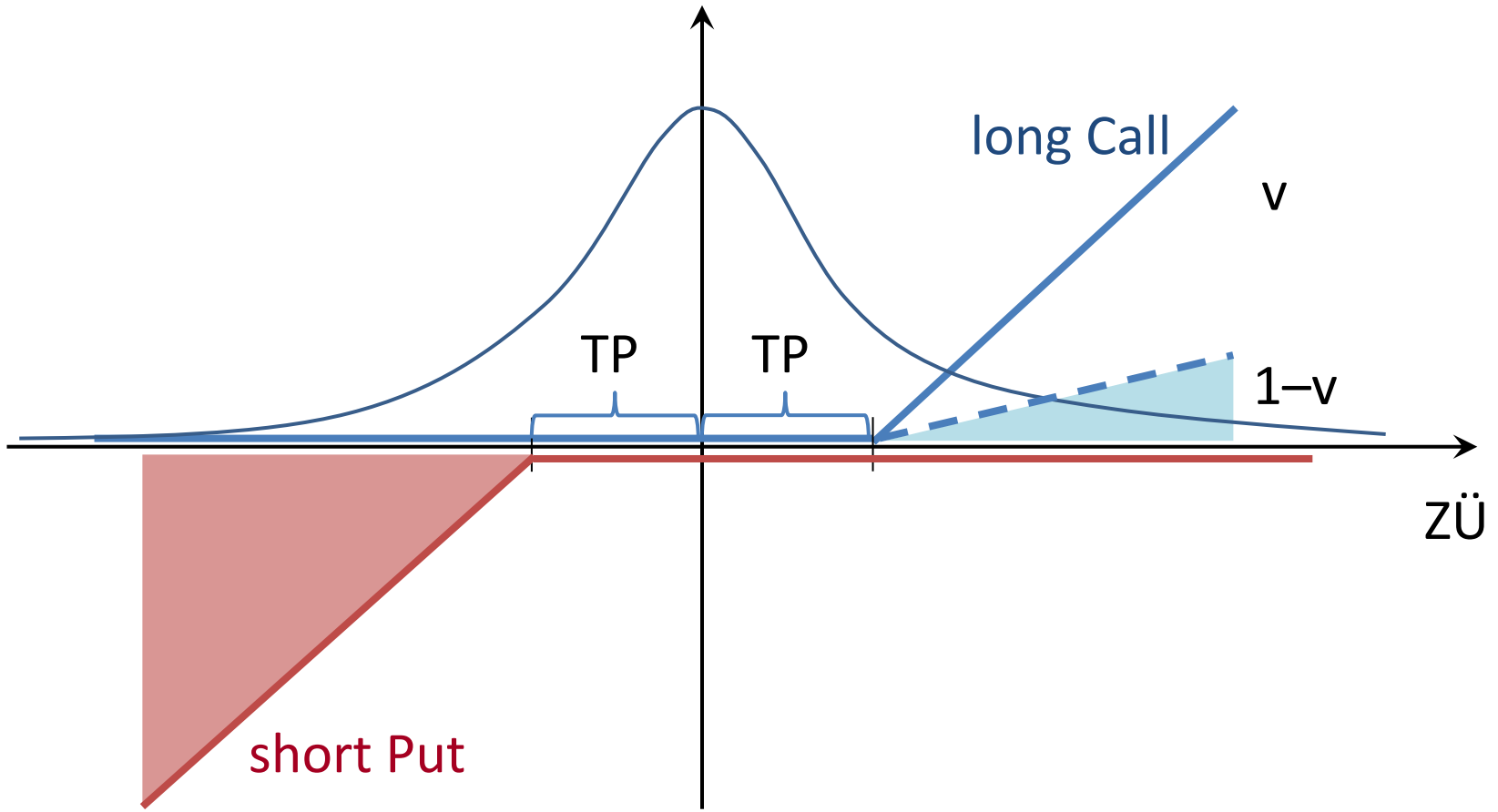
- Aufteilung ZÜ auf VN und VU

$$Z\ddot{U}(VN) = v \cdot \text{Call}$$

$$Z\ddot{U}(VU) = (1 - v) \cdot \text{Call} - \text{Put}$$

$$Z\ddot{U} = \text{Call} - \text{Put}$$

Garantien und Optionen



Garantien und Optionen

- $\text{Call} = \text{Call}(\text{KA}) + \text{Call}(\text{VT})$
 $\text{Put} = \text{Put}(\text{KA}) + \text{Put}(\text{VT})$
- $\text{ZÜ}(\text{VU}) = \text{IV}(\text{VU}) - \text{G\&O}$
 $\text{ZÜ}(\text{VN}) = \text{IV}(\text{VN}) + \text{G\&O}$
- $\text{TV}(\text{Call}) = \text{TV}(\text{Put}) = \text{TV}$
 $\text{G\&O} = v \cdot \text{TV}$

Handelsrechtlicher Rahmen

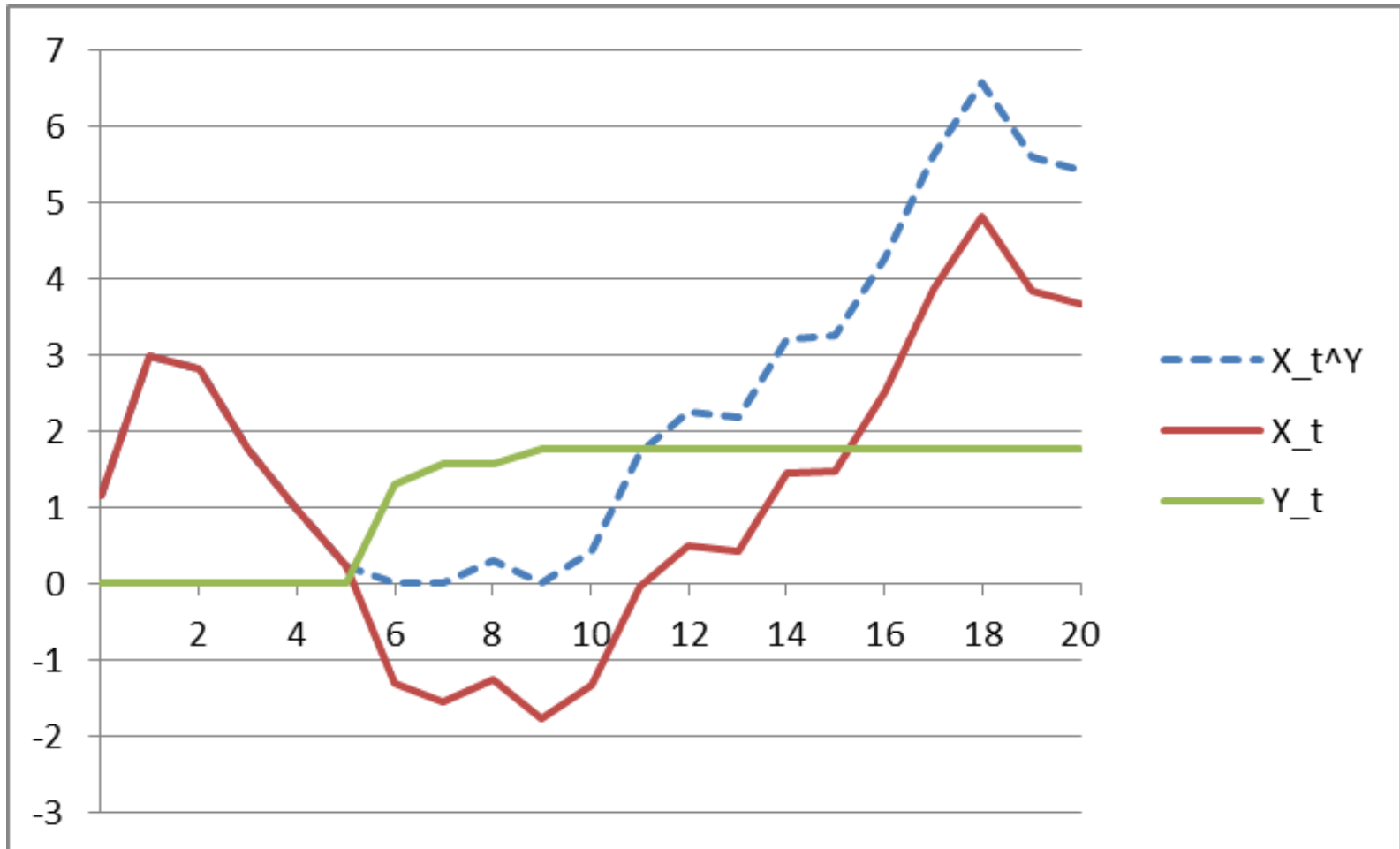
Hier nicht genutzte Pufferungsmöglichkeiten

- §56b VAG: Nutzung freie RfB
- §5 MindZV: Verrechnung Gewinnquellen
- §89 VAG: Leistungsherabsetzung
- §163 VVG: Prämien- und Leistungsänderung
- §169 VVG: Kürzung der Rückkaufswerte

Puffer Put – Idee

- Brownsche Bewegung mit Drift für Puffer X
- $X_t = x + m \cdot t + \sigma \cdot W_t$
- m, σ sind Drift und Volatilität der Gewinnquellen Zins sowie Risiko u. Kosten
- Erst bei negativem Puffer X_t werden VU-Zahlungen für Garantie erforderlich

Puffer Put – Idee



Puffer Put – Kapitaleinschüsse

- X_t^Y ist der nichtnegative reflektierte Prozess
- Y_t ist der monoton ansteigende Prozess der kumulierten Kapitaleinschüsse
- $X_t^Y = X_t + Y_t$ mit $Y_t = \min(0, X_0, \dots, X_t)$
- Puffer Put ist der Erwartungswert aller Kapitaleinschüsse $E\left(\int_0^\infty Y_t \cdot e^{-\delta \cdot t} dt\right)$

Puffer Put – Annahmen

- Siehe Shreve et al. (1984), Ruintheorie
- Annahmen
 - Zeit ist stetig
 - Zeithorizont unendlich
 - kein Bestandsabbau
 - nur eine Rechnungszinsgeneration
 - keine Mean Reversion

Puffer Put – Formel

$$\overline{PP} = (\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot 1/p \cdot e^{-p \cdot x}$$

mit

$$p = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2 \cdot \delta \cdot \sigma^2}}{\sigma^2}$$

Puffer Put – Innerer Wert

- Innerer Wert des Puffer Puts für $\sigma \rightarrow 0$, mind. so hoch, dass Kunde Garantie erhält

$$IV(\overline{PP}) =$$

$$(\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot \max \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 1/q \cdot e^{-q \cdot x} & \text{für } m < 0 \\ 0 & \text{für } m \geq 0 \end{array} \right. ; \\ (-ZÜ(\text{KA}))^+ + (-ZÜ(\text{VT}))^+ \end{array} \right)$$

$$\text{mit } q = -\delta/m$$

- Zeitwert wird reduziert, bleibt ≥ 0

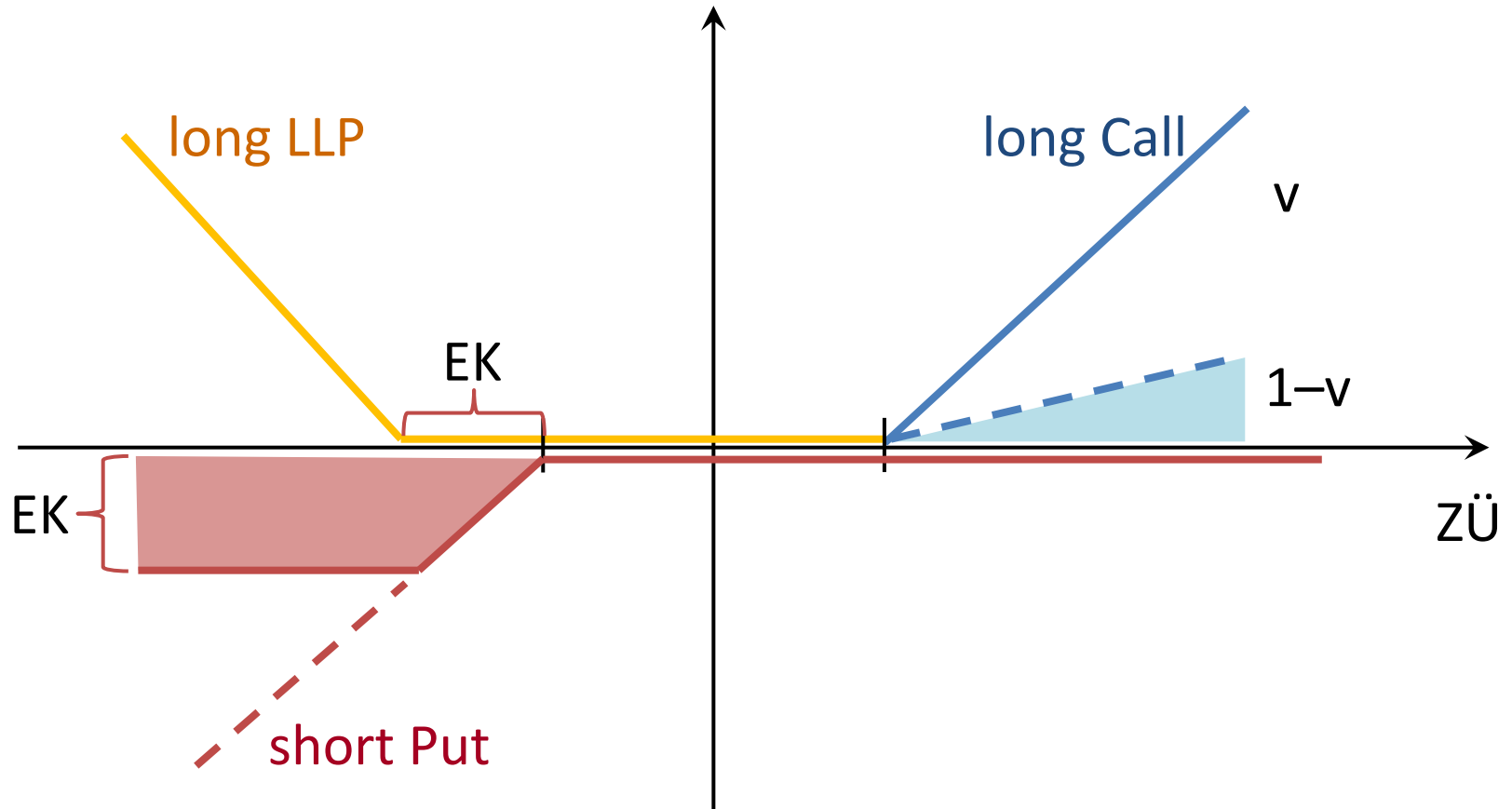
$$TV(\overline{PP}) = (\overline{PP} - IV(\overline{PP}))^+$$

Puffer Put – Limited Liability Put

- LLP: Aktionär beschränkt Haftung auf EK, keine weiteren Einschüsse, kein Neugeschäft, dann $PP \leq EK$

- $$PP = \begin{cases} \overline{PP}(x) & \text{wenn NG} = 1 \\ \overline{PP}(x) - \underbrace{\overline{PP}\left(x + \frac{EK}{\text{Aktien} + FI}\right)}_{LLP} & \text{wenn NG} = 0 \end{cases}$$

Puffer Put – Limited Liability Put



Puffer Put – Startpuffer

- Startpuffer

$$x = \frac{\text{Call}_x + RfBEM + NGF}{\text{Aktien} + FI} \geq 0$$

- Wert temporärer Pufferung durch Startpuffer

$$\begin{aligned} TP &= 1/p \cdot (1 - e^{-p \cdot x}) \cdot (\text{Aktien} + FI) \\ &\leq x \cdot (\text{Aktien} + FI) \end{aligned}$$

- Aufteilung Startpuffer

$$x(KA) = x \cdot p(VT) / (p(KA) + p(VT))$$

$$x(VT) = x - x(K)$$

Puffer Put – Startpuffer

Call_x

- dient zur Glättung des PP, anstatt Funktion mit Knick $(ABWR + MSL)^+$
- ist Black-Scholes Call auf die Assets (Aktien + FI) mit Strike in Höhe des um die maximalen Stillen Lasten reduzierten Buchwerts $(Aktien + FI - ABWR - MSL)$ mit Zins null, Restlaufzeit eins, Glättungsparameter σ_x
- $MSL = f_{MSL} \cdot HGBBS_0$

Puffer Put – Startpuffer

- Neugeschäftsfinanzierung ist Barwert überrechnungsmäßiger Abschlusskosten

$$\text{NGF} = \begin{cases} 0 & \text{wenn NG} = 1 \\ 15\% \cdot (\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot \kappa_{\text{VT}} & \text{wenn NG} = 0 \end{cases}$$

Puffer Put – Drift

- $m(VT) = -\frac{NGF}{\text{Aktien}+FI} \cdot \ln(1 + ufr)$
- $m(KA) =$
 - + $a \cdot m_{\text{Aktie}}$ (Aktien)
 - + $(1 - a) \cdot (mr \cdot ufr + \text{spread})$ (Spread)
 - $\frac{(-PBWR)^+}{\text{Aktien}+FI} \cdot \ln(1 + ufr)$ (ZZR)
 - $50\% \cdot \frac{((ABWR)^+ - (-PBWR)^+)^+}{\text{Aktien}+FI} \cdot \ln(1 + ufr)$ (BWR)
 - $lfd \cdot \frac{ZÜ(VN)+RfBEM}{\text{Aktien}+FI} \cdot \ln(1 + ufr)$ (lfd ÜB)

Puffer Put – Anpassung an SII

- Parameter δ_{Basis} verhindert Überschätzung
$$\delta = \delta_{\text{Basis}} + \ln(1 + r)$$
- Passivduration fließt nicht in Volatilität der Gewinnquelle Kapital ein, da HBG-Reservierung mit m_{rz}
- $$\sigma(\text{KA}) = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_{\text{Aktie}}^2 + (1-a)^2 \cdot (D_{\text{FI}}^2 \cdot \sigma_{\text{Zins}}^2 + \sigma_{\text{Kredit}}^2)}$$
- $\sigma(\text{VT})$ wird als Parameter vorgegeben

Embedded Value

- $$\begin{aligned} EV &= Z\ddot{U}(VU) - RM - DT + EK - INJ \\ &\quad - coc_{VU} \cdot D_{VT} \cdot EK \\ &= ASM - RfBEM - INJ - coc_{VU} \cdot D_{VT} \cdot EK \end{aligned}$$

- VU-Kapitalkostensatz analog Kreditrisiko

$$coc_{VU} = LGD \cdot pd_{VU} \cdot mf_{VU}$$

mit

$$pd_{VU} = N\left(0; \mu = ASM, \sigma = \frac{(SCR)^+}{2,58}\right)$$

Appraisal Value

- $AV = EV + NBV$

- $$NBV = \begin{cases} \widetilde{paf} \cdot \kappa_{VT} \cdot (\widetilde{Z\ddot{U}(VU)} - \widetilde{DT}) & \text{für NG} = 1 \\ -(\widetilde{paf} - \widetilde{D_{VT}}) \cdot (\widetilde{c\ddot{o}c_{VU}} \cdot EK) & \\ 0 & \text{für NG} = 0 \end{cases}$$

Appraisal Value

Der Neugeschäftswert NBV hat stets Zinsmarge

- $\widetilde{NG} \rightarrow 1$
- $\tilde{r} \rightarrow \frac{mrz}{0,6}$
- $\widetilde{FI} \rightarrow FI_0 + MFI$

mit

$$MFI = FI_0 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\kappa_{FI} + \frac{mrz}{0,6}}}{1 - e^{-\kappa_{FI} + r_{lfd}}} - 1 \right)$$

Appraisal Value

Preis-Absatz-Faktor

$$\text{paf} = \frac{1}{\text{ufr} - g}$$

mit

$$g = \min \left(\frac{\text{gvzsensi} \cdot (v - v_{\text{Markt}}) \cdot \frac{\text{Call}}{\text{HGBDR} \cdot D_{\text{VT}}}}{\text{ufr} - 1\%}; \right)$$

Beispiel – Input

| Allgemeine Parameter | |
|-------------------------|--------|
| r | 2,66% |
| oprisk | 2,00% |
| rlz _{VU} | 10,00 |
| LGD | 50,00% |
| m _{Aktie} | 6,00% |
| σ_{Aktie} | 20,00% |
| vtrisk | 0,50% |
| σ_{Zins} | 0,80% |
| COC | 6,00% |
| S _{min} | 5,00% |
| S _{max} | 25,00% |
| μ_{VNO} | 3,00% |
| σ_{VNO} | 2,00% |

| Allgemeine Parameter | |
|-------------------------|--------|
| mr | 5,00% |
| ufr | 3,50% |
| v _{Markt} | 90,00% |
| gvzsensi | 10,00 |
| f _{MSL} | 5,00% |
| δ_{Basis} | 6,00% |
| $\sigma(\text{VT})$ | 1,00% |
| σ_x | 10,00% |

| Individuelle Parameter | |
|------------------------|-------|
| r _{lfd} | 4,01% |
| r | 2,66% |
| NG | 1 |

| Individuelle Parameter | |
|------------------------|-------------|
| D _{FI} | 8,10 |
| a | 5,10% |
| pd | 0,020% |
| Assets | 10.000,00 € |
| ABWR | 1.000,00 € |
| EK | 200,00 € |
| fr.RfB | 300,00 € |
| SÜAF | 150,00 € |
| D _{VT} | 12,00 |
| flv | 10,00% |
| mrz | 3,30% |
| m _{VT} | 0,60% |
| v | 85,00% |
| lfd | 50,00% |
| tax | 30,00% |

Beispiel – Bilanz

HGB-Bilanz

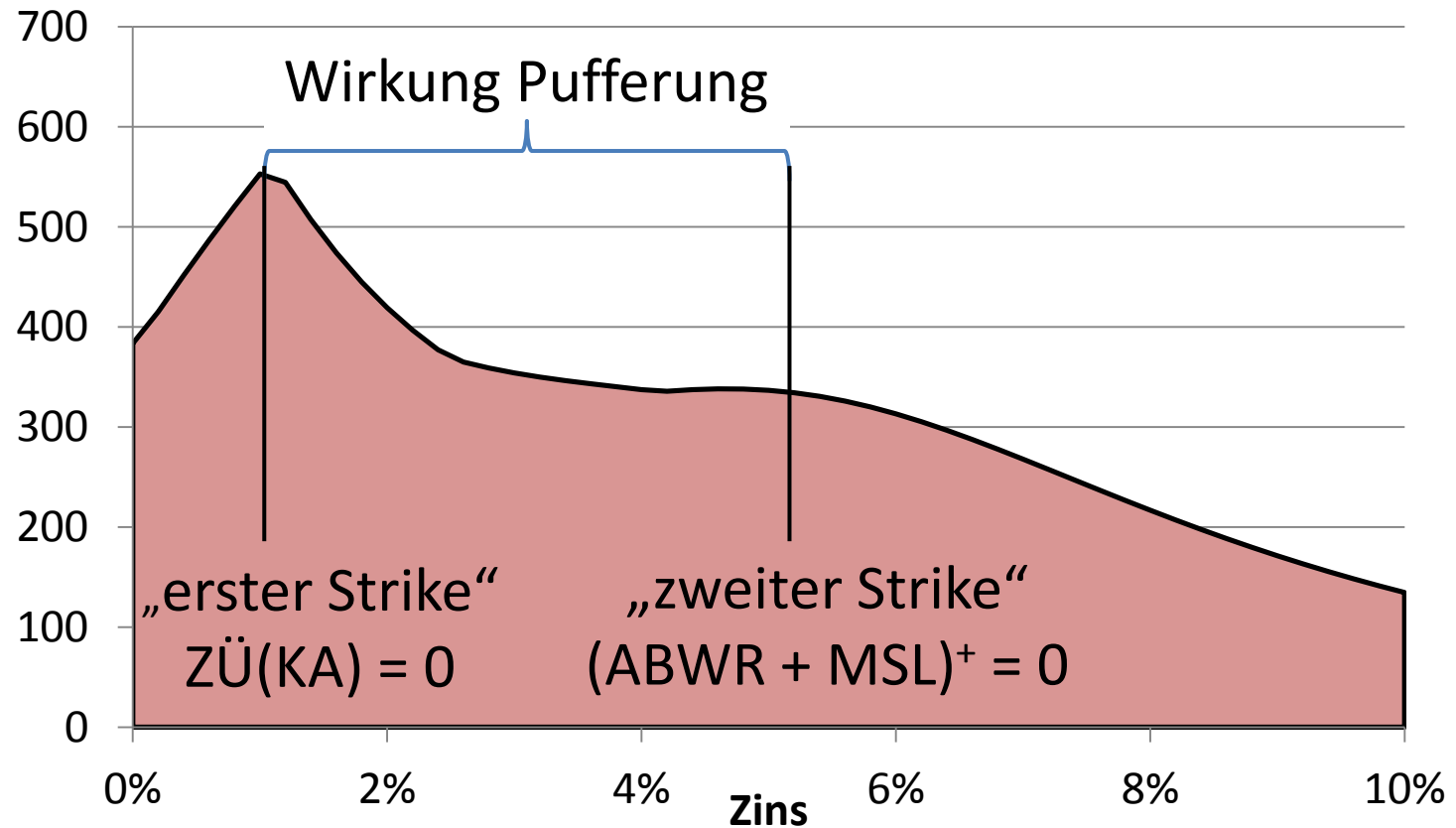
| | |
|----------|------------|
| EK | 200,00 € |
| RfBEM | 450,00 € |
| HGBDR | 7.350,00 € |
| PBWR | -35,28 € |
| Garantie | 7.385,28 € |
| FLV | 1.000,00 € |
| HGBBS | 9.000,00 € |

Marktwertbilanz

| | |
|------------|-------------|
| EK | 200,00 € |
| RfBEM | 450,00 € |
| ZÜ(VU) | -226,73 € |
| (1-v)·Call | 210,61 € |
| -Put | -437,35 € |
| -(RM+DT) | -197,05 € |
| VNO | -2,01 € |
| RM | 231,06 € |
| DT | -34,01 € |
| ZÜ(VN) | 1.193,46 € |
| Garantie | 7.385,28 € |
| FLV | 1.000,00 € |
| Assets | 10.000,00 € |

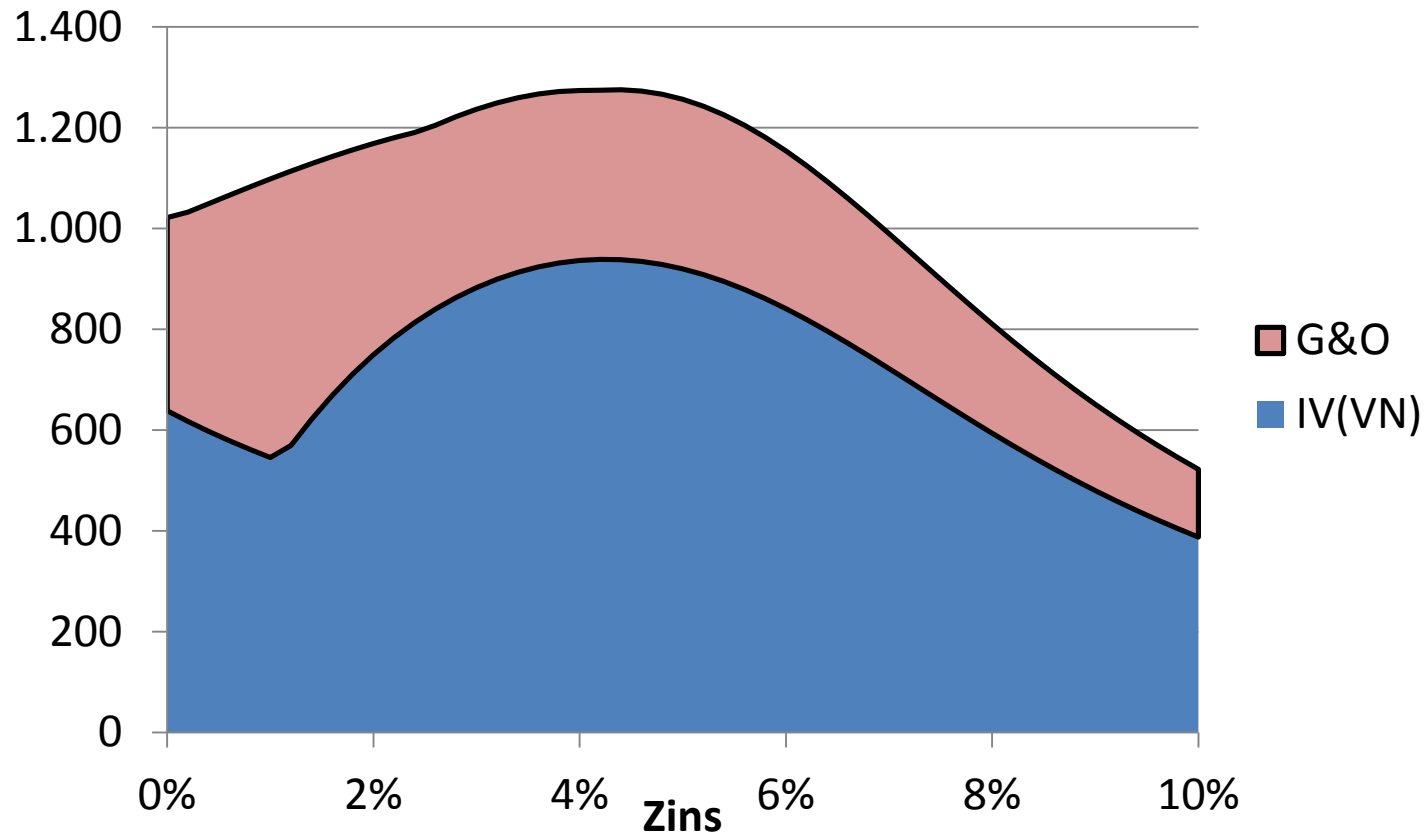
Beispiel – G&O über Zins

G&O



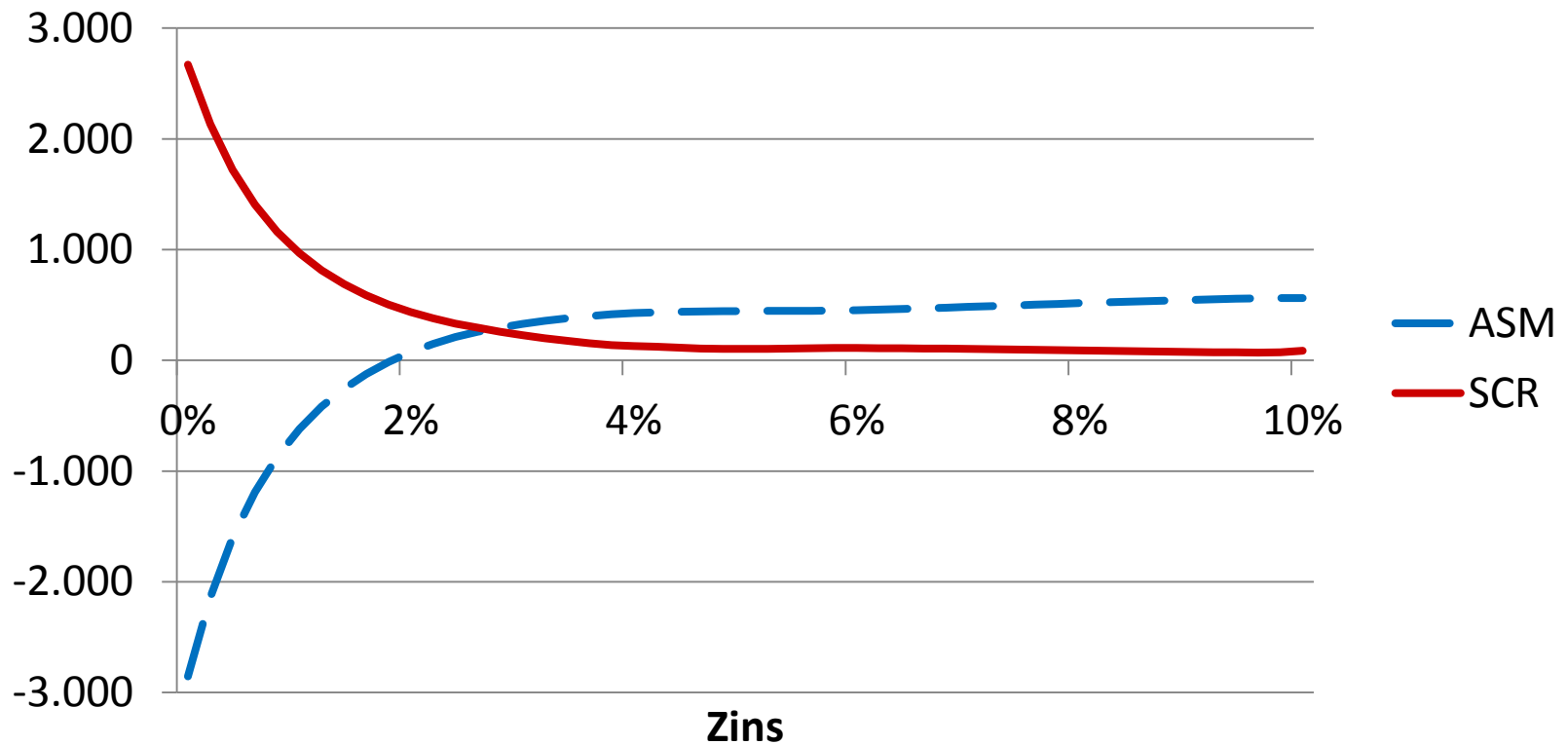
Beispiel – Überschussbeteiligung

$$ZÜ(VN) = IV(VN) + G\&O$$



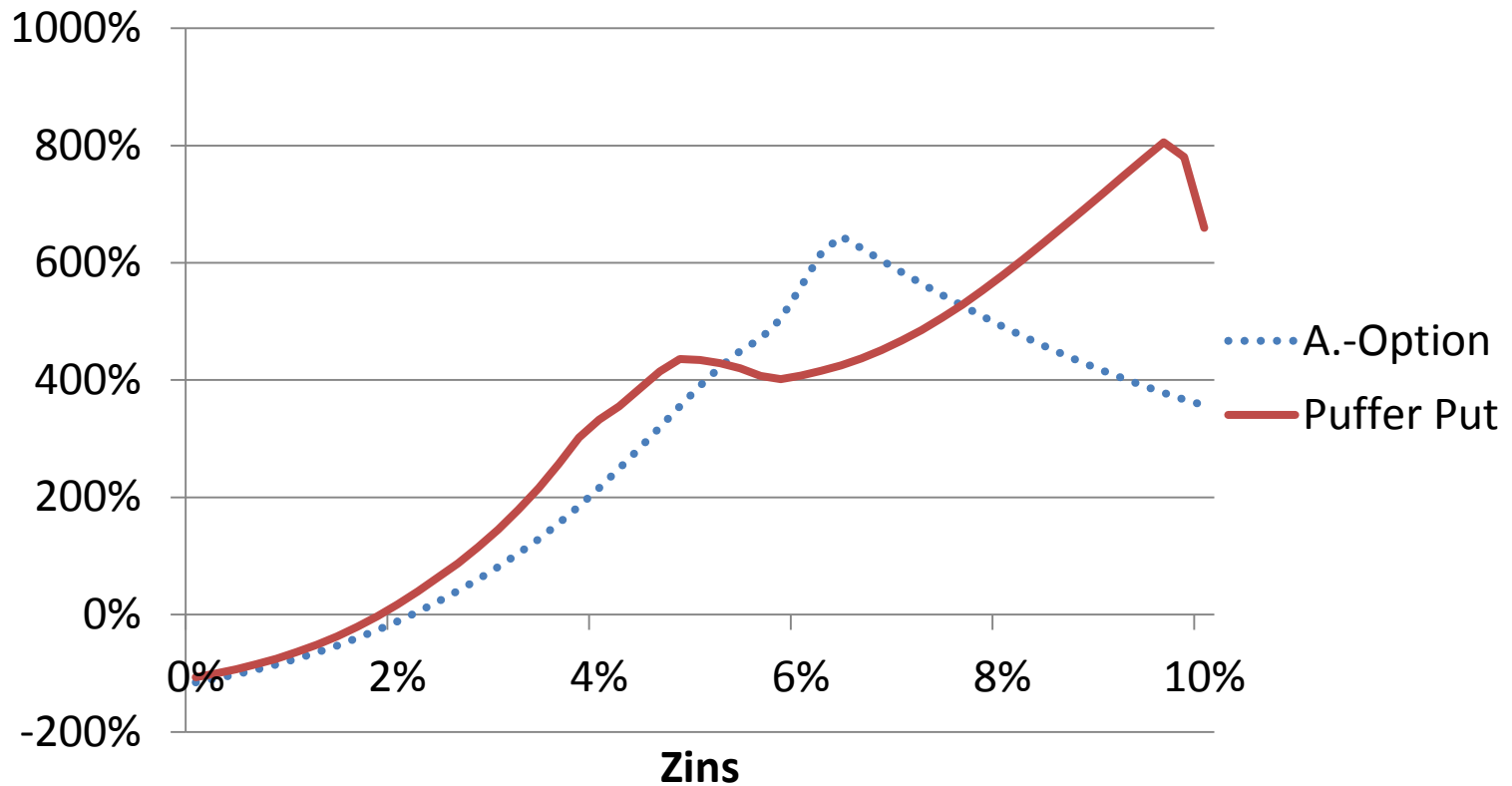
Beispiel – Solvabilität absolut

ASM und SCR



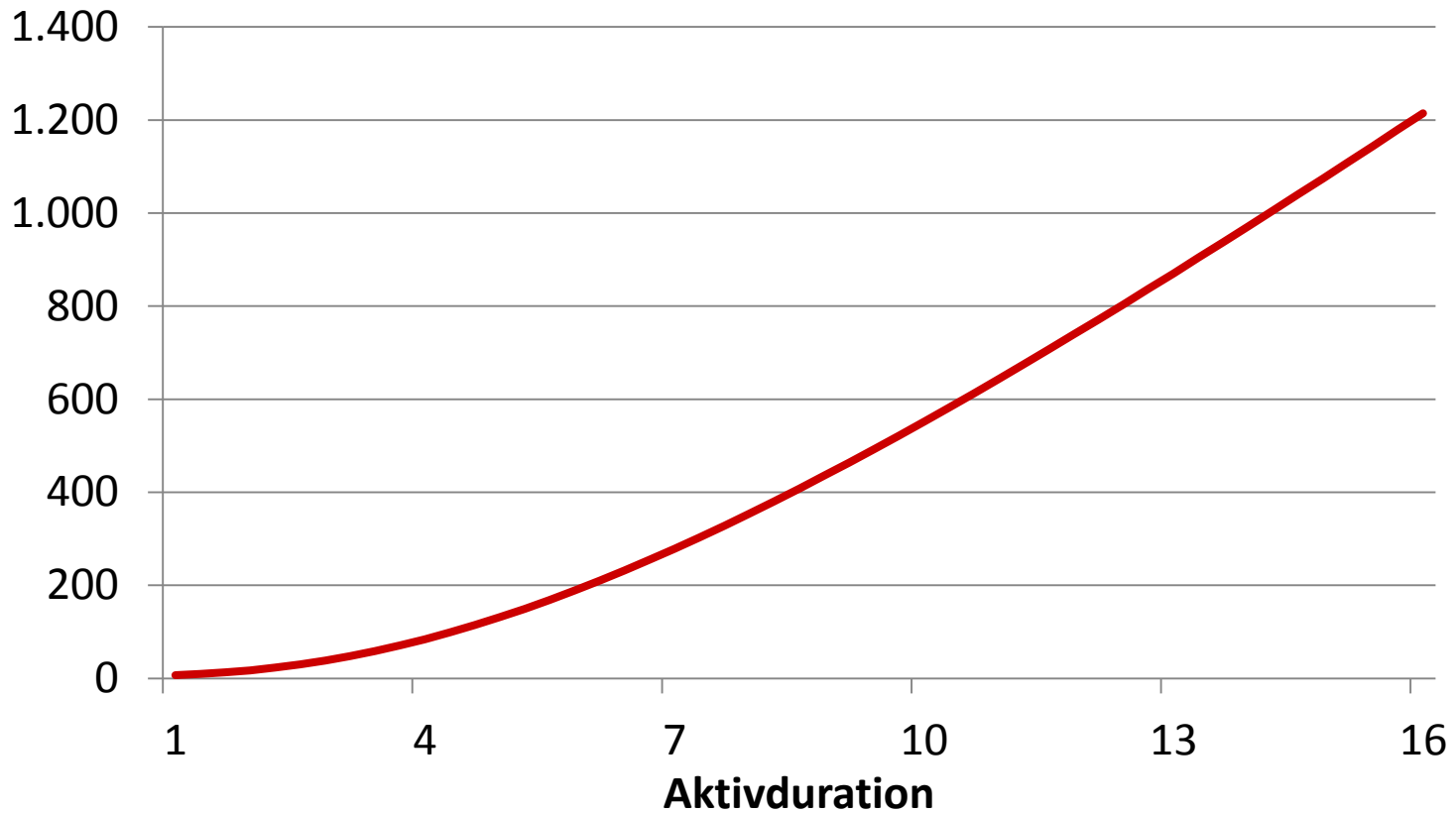
Beispiel – Solvabilität relativ

Solvency II-Quote



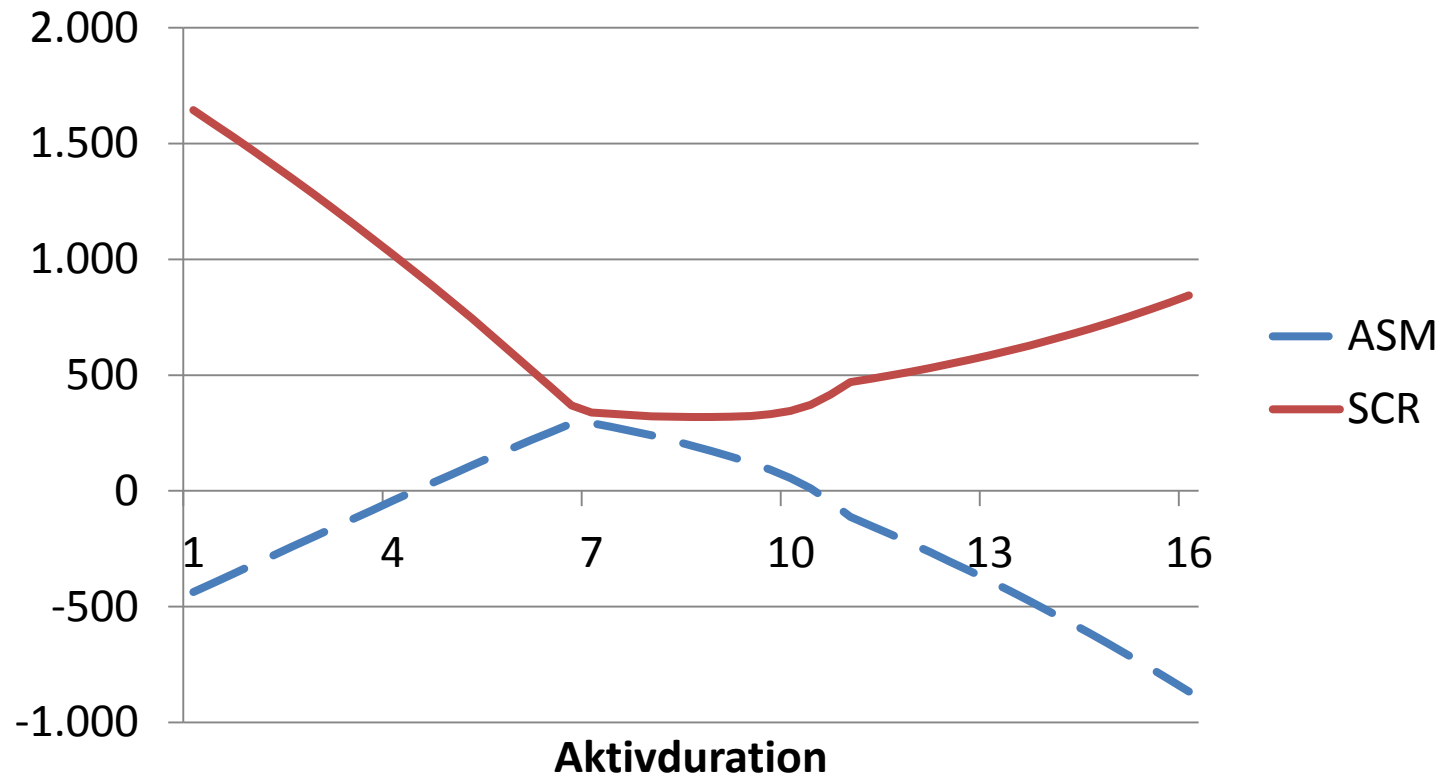
Beispiel – G&O über Aktivduration

G&O

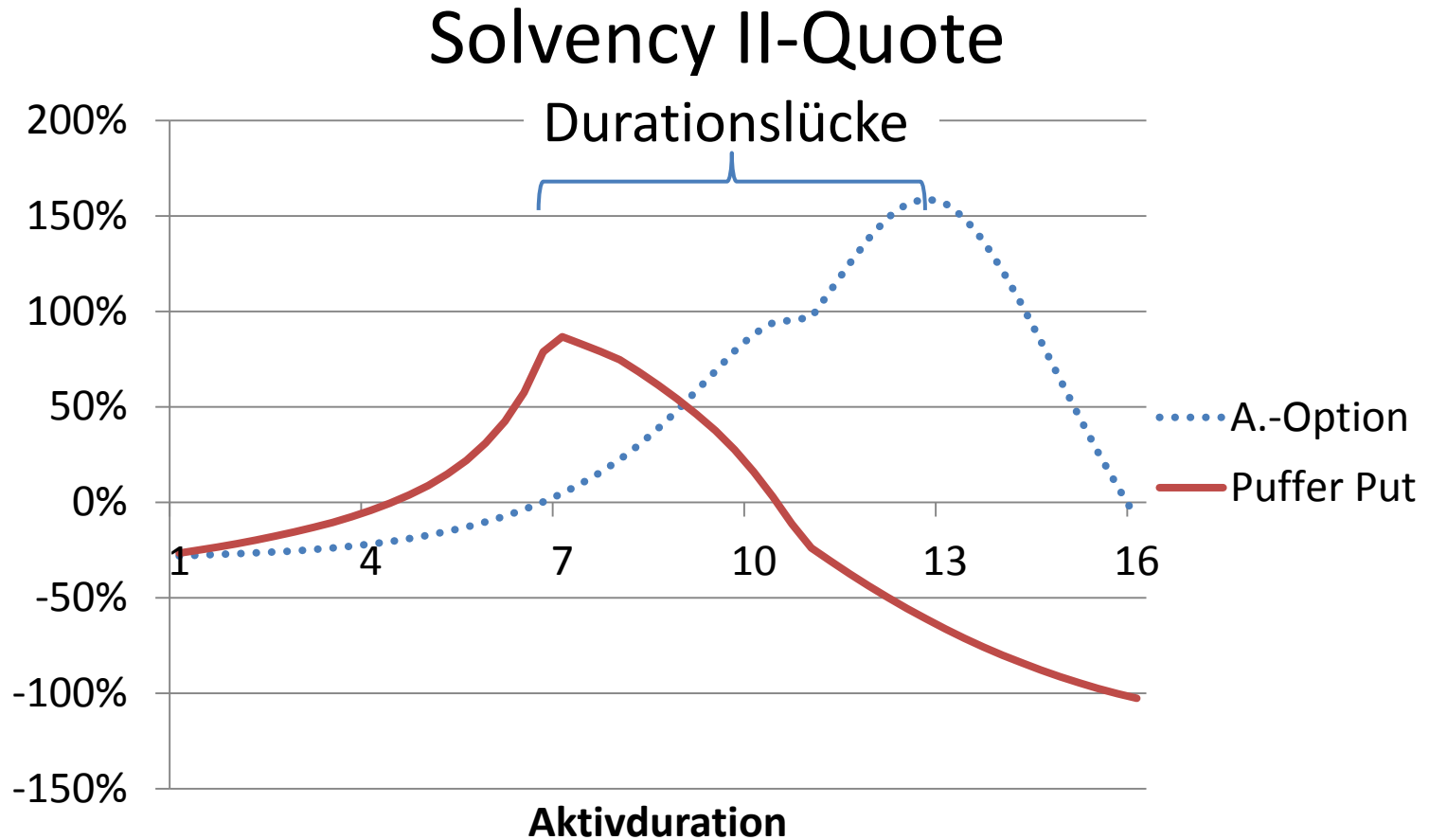


Beispiel – Solvabilität

ASM und SCR

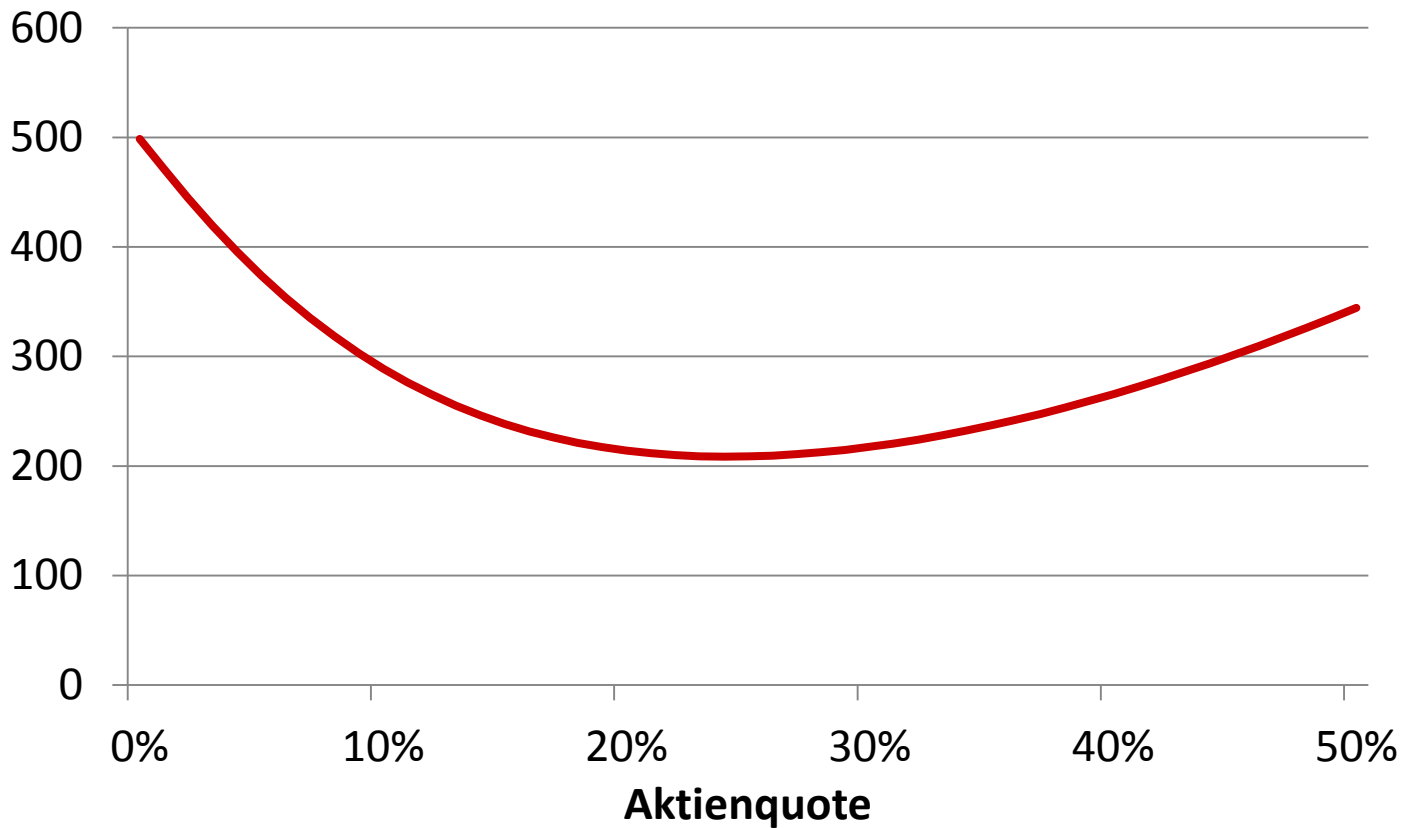


Beispiel – Solvabilität



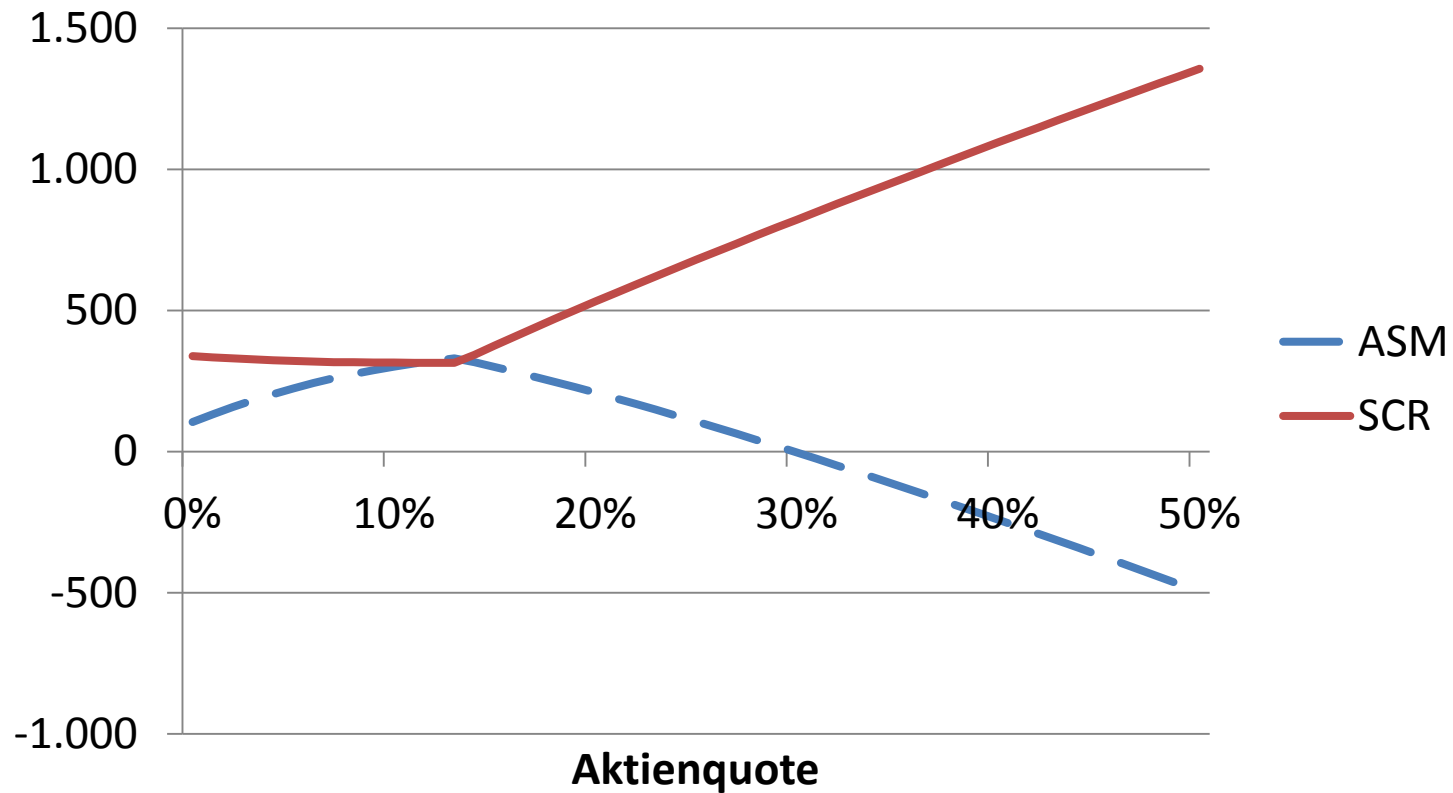
Beispiel – G&O über Aktienquote

G&O



Beispiel – Solvabilität

ASM und SCR



Beispiel – Solvabilität

Solvency II-Quote

