Optimale Risikoteilung in Versicherungsnetzwerken

Eine Anwendung im Asset-Liability-Management

Prof. Dr. Thomas Knispel

Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

(gemeinsames Projekt mit Anna-Maria Hamm und Stefan Weber)

qx-Club Berlin, 4. November 2019

Motivation und Überblick

- Klassische Kapitalregulierung basiert auf der Einzelbetrachtung von Firmen (spezielle Regelungen für die Regulierung von Gruppen).
- Firmen können ihr Geschäft in Form eines Firmennetzwerks organisieren; dies kann Kapitalanforderungen verzerren, wenn die regulatorisch vorgegebenen Risikomaße nicht konvex sind.
- Unsere Fallstudien werden illustrieren, dass Firmennetzwerke bei Verwendung von Risikomaßen vom V@R-Typ das Verlustrisiko „unter den Teppich kehren“ können.
- Themen des Vortrags:
  - I. Einführende Anmerkungen: Regulatorik & Kapitalanforderungen
  - II. Network Risk und Risikoteilung
  - III. Anwendung im Asset-Liability-Management

Teil I: Regulatorik & Kapitalanforderungen

Kapitalanforderungen

- Rolle von Kapitalanforderungen:
  - Puffer gegen mögliche Verluste
  - zum Schutz von Kunden, Versicherungsnehmern, Aktionären ...
- Berechnungsprinzipien in Kurzform:
  - Marktkonsistente Bewertung aller Assets und Liabilities
  - Stochastische Bilanzprojektionen, die die zufällige Entwicklung der Eigenmittel in einem gegebenen Zeithorizont abbilden

  - Berechnung der Kapitalanforderung auf Basis der Prognoseverteilung
    $\rightsquigarrow$ Verwendung eines geeigneten Risikomaßes
- Einfaches Beispiel: Solvency II
  - SCR = Solvency Capital Requirement (Solvabilitätskapitalanforderung)
  - Kernziel: Limitierung der einjährigen Ruinwahrscheinlichkeit auf höchstens 0,5%

Standardformel vs. Internes Modell

Berechnungsmethoden:

- Standardformel
- Standardformel mit USP
- Partielles internes Modell
- Internes Modell

Interne Modelle:

- Verwendung interner Modelle zur Berechnung der Solvabilitätskapitalanforderung möglich
- Implementierung in komplexen Simulationsmodellen, teilweise unter Verwendung von Approximationsverfahren wie z. B. replizierenden Portfolien oder LSMC für interne Modelle Leben
- Genehmigung durch Aufsicht (BaFin) notwendig
  - Hoher Aufwand und Kosten durch Zertifizierungsprozess und Modellbetrieb
  - Aber: Bessere Abbildung des Risikoprofils durch unternehmensspezifische Modellierung
  - Positive Signalwirkung in Bezug auf aktuarielles Knowhow (Image)
- Interne Modelle sind mehr als ein Werkzeug zur SCR-Berechnung:
  Einbettung des internen Modells in das Unternehmen notwendig („Use Test“, §115 VAG)

Monetäre Risikomaße und Kapitalanforderungen

- Rahmen:
  - Einperiodenmodell wie in Solvency II: $t = 0, 1$
  - $\mathcal{X}$ ist die Menge aller Finanzpositionen zum Zeitpunkt 1
- Monetäres Risikomaß $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$:
  - Inverse Monotonie: Ist $X \geq Y$, so gilt $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
  - Cash-Invarianz: Für $m \in \mathbb{R}$ gilt $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

  Ein monetäres Risikomaß ist eine Kennzahl, die bestimmte Eigenschaften der zukünftigen Bilanzentwicklung zusammenfasst.
- Kapitalanforderungen:
  - Eine Position $X \in \mathcal{X}$ ist akzeptabel, wenn $\rho(X) \leq 0$.
    Die Menge $\mathcal{A}$ aller akzeptablen Positionen heißt Akzeptanzmenge.
  - ρ entspricht einer Kapitalanforderung, d. h.

$$\rho(X) = \inf \{m \in \mathbb{R} : X + m \in \mathcal{A}\} .$$

Diversifikation und Risikomaße

- Diversifikation:
  - Diversifikation sollte das Risiko nicht erhöhen, d. h.:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \max\{\rho(X), \rho(Y)\} \quad \text{für } X, Y \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \in (0,1)$$

  - Konsequenz: Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ ist konvex; ρ ist ein konvexes Funktional:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad \text{für } X, Y \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \in (0,1)$$

- Definition (konvexes Risikomaß):
  - Ein monetäres Risikomaß ρ auf $\mathcal{X}$ heißt konvexes Risikomaß, falls es ein konvexes Funktional ist und damit Diversifikation nicht bestraft.
  - Ein konvexes Risikomaß wird kohärent genannt, falls es zusätzlich positiv homogen ist, d. h. es gilt

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \quad \text{für alle } X \in \mathcal{X} \text{ und } \lambda \geq 0.$$

- Basis für LuSS: Jedes kohärente Risikomaß ρ ist subadditiv, d. h. es gilt

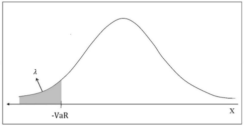
$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{X}.$$

Value at Risk and Alternativen

- Beispiel: Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$

$$V@R_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X + m < 0] \le \lambda\} = -q_X^+(\lambda)$$

wobei q_X^+ die oberere Quantilfunktion von X bezeichnet.



  - V@R ist kein konvexes Risikomaß und kann daher Diversifikation bestrafen. Zudem berücksichtigt $V@R_\alpha$ keine extremen Verluste mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten.
  - Diese Schwächen waren der Ausgangspunkt für eine systematische Theorie der kohärenten und konvexen Risikomaße, siehe Artzner et al. (1999) und Föllmer&Schied (2002).
  - Basis der Kapitalanforderungen unter Solvency II

- Alternative: Average Value at Risk/Expected Shortfall (kohärentes Risikomaß)

$$AV@R_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\alpha(X)\, d\alpha$$

  - AV@R berücksichtigt extreme Verluste und liefert Anreize zur Diversifikation.
  - Für stetige Zufallsvariablen stimmt AV@R mit dem Tail Value at Risk überein (siehe z. B. Acerbi&Tasche (2000)):

$$TV@R_\lambda(X) := \mathbb{E}[-X \mid -X > V@R_\lambda(X)]$$

  - Basis der Kapitalanforderungen im Swiss Solvency Test (SST)

SCR und Solvency II

- Erwägungsgrund 64 der Richtlinie 2009/138/EU:

  Die Solvabilitätskapitalanforderung sollte bei dem ökonomischen Kapital angesetzt werden, „das Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen halten müssen, um sicherzustellen, dass es höchstens in einem von 200 Fällen zur Insolvenz kommen kann oder diese Unternehmen mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,5\%$ *in den kommenden zwölf Monaten weiterhin in der Lage sein werden, ihren Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern und Begünstigten nachzukommen."*

- SCR in einem vereinfachten Modell:
  - Zeitpunkte: $t = 0, 1$ (vereinfachend keine Diskontierung im Einjahreshorizont)
  - Wert der Assets: A_t, $t = 0, 1$
  - Wert der Liabilities: L_t, $t = 0, 1$
  - Eigenmittel (NAV): $E_t = A_t - L_t$, $t = 0, 1$

$$\mathbb{P}[E_1 < 0] \leq 0,005 \Leftrightarrow E_1 \in \mathcal{A}_{\mathrm{V@R}_{0,005}} \Leftrightarrow \mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}(E_1) := \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - E_0) \leq E_0.$$

- Kanonische SCR-Definition im Kontext von Solvency II:
  - $\mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - E_0) = E_0 + \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1)$
  - Interpretation: Bedeckungsquote $\geq 100\%$ genau dann, wenn $\mathbb{P}[E_1 < 0] \leq 0,005$

Solvency II - Regulatorische Anforderungen

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

- §97(2) VAG oder Richtlinie 2009/138/EU, Artikel 101(3):

  „In Bezug auf den aktuellen Geschäftsumfang deckt die Solvabilitätskapitalanforderung nur unerwartete Verluste ab. Sie entspricht dem Value-at-Risk der Basiseigenmittel eines Versicherungsunternehmens zu einem Konfidenzniveau von 99,5 Prozent über einen Zeitraum von einem Jahr“.

- SCR in der Praxis: Mean Value at Risk

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(E_1) := \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - \mathbb{E}[E_1]) = \mathbb{E}[E_1] + \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1)$$

- Bemerkungen:
  - Beide Definitionen sind konsistent zu spezifischen regulatorischen Anforderungen, führen jedoch zu verschiedenen Solvabilitätskapitalanforderungen.
  - Für Gauß'sche Zufallsvariablen kann das Risiko bezüglich $\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}$ mit der Wurzelformel aggregiert werden. Dies ist eine Schlüsselannahme der SII-Standardformel.

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(X+Y) = \sqrt{\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(X)^2 + \mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(Y)^2 + 2\rho\,\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(X)\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(Y)}$$

    - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mu - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma$, $\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(X) = -\Phi^{-1}(\lambda)\sigma$
    - $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)$ für alle $X, Y \in L^2$ mit Korrelation ρ
  - Sowohl $\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}$ als auch $\mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}$ erben die Schwächen des Risikomaßes V@R!

Alternative Risikomaße

- Es bezeichne ρ ein monetäres (konvexes) Risikomaß mit Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}(E_1) := \rho(E_1 - E_0)$$
$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}(E_1) := \rho(E_1 - \mathbb{E}[E_1])$$

- Beachte: $\rho(E_1) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; E_1 \in \mathcal{A} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}(E_1) \leq E_0$.
- Geeignete Beispiele:
  - kohärentes Risikomaß AV@R (SST & Basel III)
  - Expectiles
- $\mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}(E_1)$ für $\rho = \mathrm{AV@R}_{0,01}$ vergleichbar mit der Spezifikation des Zielkapitals im Swiss Solvency Test.

Teil II: Network Risk und Risikoteilung

Network Risk

- Firma ist nicht konsolidiert, sondern bildet ein Netzwerk:
  - Einzelgesellschaften $i = 1, 2, \ldots, n$,
  - individuell reguliert gemäß Risikomaß ρ^i
- Die Gesamtbilanz des Networks kann auf die Einzelgesellschaften mithilfe von Kapitaltransfervereinbarungen aufgeteilt werden:

$$(E_t^i)_{i=1,2,\ldots,n} \text{ mit } E_t = \sum_{i=1}^{n} E_t^i, \quad t = 0, 1$$

- Gesamt-SCR des Netzwerks:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}^i(E_1^i) = E_0 + \sum_{i=1}^{n} \rho^i(E_1^i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}^i(E_1^i) = \mathbb{E}[E_1] + \sum_{i=1}^{n} \rho^i(E_1^i)$$

Optimale Risikoteilung

- Das Netzwerk kann optimale Kapitaltransfers aufsetzen, um das SCR zu minimieren.
- Dies führt zu folgendem optimalen Risikoteilungsproblem:

$$\square_{i=1}^{n}\rho^{i}(E_1) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\rho^{i}\left(E_1^{i}\right)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}E_1^{i}=E_1,\ E_1^{1},\dots,E_1^{n}\in\mathcal{X}\right\}$$

  – Dies ist auch als inf-convolution bekannt, eingeführt von Barrieu&El Karoui (2005) und Barrieu&El Karoui (2008).
  – Reichhaltige Literatur zu optimaler Risikoteilung, z. B. Galchion (2010), Jouini, Schachermayer&Touzi (2008), Embrechts, Liu&Wang (2018)

- Resultierende optimale Sovabilitätskapitalanforderungen:

$$\square_{i=1}^{n}\mathrm{SCR}_{\mathcal{A}}^{i}(E_1) := E_0+\square_{i=1}^{n}\rho^{i}(E_1) \quad \text{und} \quad \square_{i=1}^{n}\mathrm{SCR}_{\mathrm{mean}}^{i}(E_1) := \mathbb{E}[E_1]+\square_{i=1}^{n}\rho^{i}(E_1)$$

- Ebenso kann die Struktur des Netzwerks in Bezug auf die Anzahl n der Gesellschaften restrukturiert werden.

Beispiel 1: Risikoteilung und kohärente Risikomaße

- Verwendung eines einheitlichen Risikomaßes: $\rho^i = \rho$, $i = 1, 2, \dots, n$
- Falls ρ kohärent ist, gilt

$$\rho(E_1) = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} E_1^i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(E_1^i).$$

  – Diese untere Schranke wird angenommen für $E_1^i = \alpha^i E_1$, $i = 1, \dots, n$, mit beliebigen Gewichten $\alpha^1 + \dots + \alpha^n = 1$.
  – Insbesondere ist es optimal, die gesamten Eigenmittel auf eine Gesellschaft zu allokieren, z. B. die Holding.
- Dies ist der Fall für den Swiss Solvency Test, der auf dem kohärenten Risikomaß AV@R basiert.
- Im Gegensatz dazu ist V@R – die Basis von Solvency II – nicht kohärent.

Beispiel 2: Risikoteilung und Value at Risk

- Für $\rho^i = \mathsf{V@R}_{\alpha_i}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0,1)$ gilt

$$\square_{i=1}^n \mathsf{V@R}_{\alpha_i}(E_1) = \mathsf{V@R}_{\sum_{i=1}^n \alpha_i}(E_1).$$

  siehe z. B. Embrechts, Liu&Wang (2018)
- Insbesondere $\square_{i=1}^n \mathsf{V@R}_{\alpha}(E_1) = \mathsf{V@R}_{n\cdot\alpha}(E_1)$.
- Die optimale Allokation $(E_1^i)_{i=1,2,\dots,n}$ kann explizit berechnet werden.

Für Value at Risk erlauben geeignete Netzwerkstrukturen und Kapitaltransfer-vereinbarungen das Verlustrisiko vollständig unter den Teppich zu kehren!

- Embrechts, Liu&Wang (2018) zeigen, dass dasselbe Problem für den Range Value at Risk RV@R auftritt (eingeführt von Cont, Deguest&Scandolo (2010)):
  - $\mathsf{RV@R}_{\alpha,\beta}(X) = \frac{1}{\beta}\int_\alpha^{\alpha+\beta} \mathsf{V@R}_\gamma(X)\,d\gamma$ für $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta \leq 1$
  - $\square_{i=1}^n \mathsf{RV@R}_{\alpha_i,\beta_i}(E_1) = \mathsf{RV@R}_{\sum_{i=1}^n \alpha_i, \max\{\beta_1,\dots,\beta_n\}}(E_1)$.
- Allgemeiner analysiert Weber (2018) die Risikoteilung für Risikomaße vom V@R-Typ und erweitert die Ergebnisse von Embrechts, Liu&Wang (2018).

Beispiel 3: Risikoteilung und Distortion-Risikomaße (1)

- Klasse von Distortion-Risikomaßen inklusive V@R, AV@R, RV@R (Weber (2018)):
  - Spezielle Distortion-Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ wachsend mit

$$g(x) = 0 \text{ für } x \in [0,\alpha],\ g(x) > 0 \text{ für } x \in (\alpha, 1],\ g(1) = 1$$

  - Distortion-Risikomaß: $\rho^g(X) := \int(-X)dc^g$ definiert als Choquet-Integral bezüglich der Capacity $c^g(A) := g(\mathbb{P}[A])$, $A \in \mathcal{F}$
  - ρ^g ist kohärent genau dann, wenn g konkav ist.
  - Alternative Darstellung als Mischung: $\rho^g(X) = \int_{[0,1]} \mathrm{V@R}_\lambda(X)\, g(d\lambda)$
- Falls $\alpha > 0$, so wird ρ^g ein Risikomaß vom V@R-Typ genannt.
  - V@R und RV@R sind Risikomaße vom V@R-Typ, AV@R nicht.

Risikomaß	$\mathrm{V@R}_\alpha$	$\mathrm{AV@R}_\beta$	$\mathrm{RV@R}_{\alpha,\beta}$
g(x) =	$\begin{cases} 0, & 0 \le x \le \alpha \\ 1, & \alpha < x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{\beta}, & 0 \le x \le \beta \\ 1, & \beta < x \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & 0 \le x \le \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta}, & \alpha < x \le \alpha+\beta \\ 1, & \alpha+\beta < x \end{cases}$
Typ	V@R-**Typ**	**Nicht** V@R-**Typ**	V@R-**Typ**

  - Interpretation: $\rho^g(X) = \int_{[\alpha,1]} \mathrm{V@R}_\lambda(X)\, g(d\lambda)$ hängt nicht von Eigenschaften des Tails der Position X jenseits ihres V@R zum Niveau α ab.

Beispiel 3: Risikoteilung und Distortion-Risikomaße (2)

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

- Kernergebnisse in Weber (2018):
  - Es seien $g^1, g^2, \dots, g^n$ linksstetige Distortion-Funktionen mit endlich vielen Sprüngen und Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0,1)$, $\rho^i = \rho^{g^i}$ und $d = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
  - Konstruktion einer optimalen Risikoteilung mit:
    - Für $d < 1$ kehrt die Allokation alle Verluste über $\mathrm{V@R}_d(X)$ unter den Teppich.
    - Ist $d \geq 1$, so gilt $\square_{i=1}^n \rho^i(E_1) = -\operatorname{ess\,sup} E_1$ (best case).
  - Risikomaße vom V@R-Typ kehren das Verlustrisiko unter den Teppich.
- Zusätzlicher Beitrag in Hamm, Knispel&Weber (2018): Konstruktion einer fairen Allokation aus Sicht der Einzelgesellschaften

Teil III: Anwendung im Asset-Liability-Management

Überblick

- Netzwerke können verschiedene (statische) Asset-Allokationen in Einjahreshorizont implementieren. Wir betrachten drei Situationen unterschiedlicher Komplexität:
  1. Assets sind durch einen Black-Scholes-Markt beschrieben, Liabilities sind deterministisch.
  2. Liabilities sind stochastisch; verschiedene Abhängigkeiten zwischen Assets und Liabilities werden untersucht.
  3. Ein weiteres Asset mit hohem Verlustrisiko (linksschiefe Verteilung) ist verfügbar.
- In diesen Fällen wird der Einfluss der Anzahl n der Einzelgesellschaften im Netzwerk auf das minimale Risiko des Netzwerks $\square_{i=1}^{n} \rho^{i}\left(E_1\right)$ und das SCR analysiert.
- Es wird demonstriert, wie ALM das minimale Risiko des Netzwerks weiter reduzieren kann.
- Die Analysen erfolgen für drei verschiedene Risikomaße: V@R, AV@R und RV@R.

Technische Bemerkungen

- Parametrisierung der Risikomaße:
  - Im Netzwerk verwenden alle Einzelgesellschaften dasselbe Risikomaß:
    (a) $\rho^i = \text{V@R}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, für alle $i = 1, \dots, n$,
    (b) $\rho^i = \text{AV@R}_\beta$, $\beta \in (0,1)$, für alle $i = 1, \dots, n$,
    (c) $\rho^i = \text{RV@R}_{\gamma,\epsilon}$, $\gamma, \epsilon \in (0,1)$, für alle $i = 1, \dots, n$.
  - Für V@R_α wird $\alpha = 0,1$ gewählt, für RV@R der Parameter $\gamma = 0,05$ gesetzt.
  - Die übrigen Parameter β, ϵ sind so kalibriert, dass für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt:

$$\text{V@R}_\alpha(X) = \text{AV@R}_\beta(X) = \text{RV@R}_{\gamma,\epsilon}(X).$$

  - Zusammenfassung der Parameter:

V@R_α	AV@R_β	$\text{RV@R}_{\gamma,\epsilon}$
$\alpha = 0,1$	$\beta = 0,2456$	$\gamma = 0,05$, $\epsilon = 0,1072$

- Monte-Carlo-Simulation: 500.000 Simulationen
  - Asset-Verteilungen werden modifiziert, indem Asset-Werte über dem 99,95%-Quantil auf das 99,95%-Quantil gesetzt werden.
  - Liability-Verteilungen werden modifiziert, indem Liability-Werte über dem 99,95%-Quantil auf das 99,95%-Quantil sowie Werte unterhalb des 0,05%-Quantils auf das 0,05%-Quantil gesetzt werden.

Allgemeines Asset-Liability-Modell

- Zeit: ALM-Modell mit endlichem Zeithorizont 1
- Assets:
  - Finanzmarkt mit einer endlichen Anzahl $K \geq 1$ liquide gehandelter Assets
  - A_t^k Preis pro Einheit von Asset $k = 1, \dots, K$ in $t \in [0, 1]$
- Liabilities: L_t konsolidierte Liabilities zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$
- Statische Asset-Allokationsstrategie für die Periode:
  - δ^k Anteil der Bilanzsumme, der in Asset k investiert wird
  - Asset-Allokationsstrategie $\delta \in \mathbb{R}^K$ mit $\delta^k \geq 0$ und $\sum_{k=1}^K \delta^k = 1$
  - Anzahl der gehaltenen Anteile in den Assets $k = 1, \dots, K$:

$$\eta^k(\delta) = \delta^k \cdot \frac{E_0 + L_0}{A_0^k}$$

- Eigenmittel:

$$E_t(\delta) = \sum_{k=1}^K \eta^k(\delta) A_t^k - L_t, \quad t \in [0, 1]$$

Basismodell

- Asset-Modell: Black-Scholes-Markt auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, \mathbb{P})$
  - Sparbuch: $A_t^1 = \exp(rt)$, $t \in [0,1]$, mit Zinsrate r
  - Aktie: $A_t^2 = A_0^2 \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$, $t \in [0,1]$, $(W_t)_{t\in[0,1]}$ Wiener-Prozess
- Liability-Modell:
  - Produktspektrum umfasst nur reine Erlebensfallversicherungen mit Fälligkeit 1.
  - Die Prämieneinnahmen des Netzwerks in $t = 0$ werden mit π bezeichnet. Die Liabilities sind deterministisch und der Diskontzins ist 0, d. h.,

$$L_t = \pi, \quad t \in [0,1].$$

- Eigenmittel:

$$E_t(\delta) = \eta^1(\delta)A_t^1 + \eta^2(\delta)A_t^2 - L_t = \eta^1(\delta)A_t^1 + \eta^2(\delta)A_t^2 - \pi \quad (t \in [0,1])$$

- Parametrisierung:
  - Asset-Seite: $r = 0$, $A_0^2 = 30$, Drift $\mu = \ln(35/30) \approx 0,1542$ (d. h. $\mathbb{E}[A_1^2] = 35$), Volatilität $\sigma = 0,2$, Asset-Wert beschränkt durch sein 99.95%-Quantil $66,2512$
  - Liability-Seite: $\pi = 90$, d. h. $L_0 = L_1 = \pi = 90$
  - $E_0(\delta) = 30$, d. h. Bilanzsumme $E_0(\delta) + L_0 = 120$
  - Asset-Allokation: $\delta^1 = 0,75$, $\delta^2 = 0,25$, d. h. $\eta^1(\delta) = 90, \eta^2(\delta) = 1$, $E_1(\delta) = A_1^2$

Effekt der Netzwerkstruktur

- Numerische Ergebnisse: Basis-ALM-Modell mit deterministischen Liabilities.

	$\mathbb{E}[E_1(\delta)]$	$\square_{i=1}^{n} \text{V@R}^{i}_{\alpha}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \text{SCR}^{i}_{\mathcal{A}}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \text{SCR}^{i}_{\text{mean}}\,(E_1(\delta))$
$n = 1$	**34,9982**	**-26,5577**	**3,4423**	**8,4405**
$n = 5$	**34,9982**	**-34,3060**	**-4,3060**	**0,6922**
$n = 10$	**34,9982**	**-66,2512**	**-36,2512**	**-31,2530**

	$\mathbb{E}[E_1(\delta)]$	$\square_{i=1}^{n} \text{AV@R}^{i}_{\beta}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \text{SCR}^{i}_{\mathcal{A}}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \text{SCR}^{i}_{\text{mean}}\,(E_1(\delta))$
$n = 1, 5, 10$	**34,9982**	**-26,6784**	**3,3216**	**8,3198**

	$\mathbb{E}[E_1(\delta)]$	$\square_{i=1}^{n} \text{RV@R}^{i}_{\gamma,\epsilon}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \text{SCR}^{i}_{\mathcal{A}}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \text{SCR}^{i}_{\text{mean}}\,(E_1(\delta))$
$n = 1$	**34,9982**	**-26,5722**	**3,4278**	**8,4260**
$n = 5$	**34,9982**	**-30,9523**	**-0,9523**	**4,0459**
$n = 10$	**34,9982**	**-35,2473**	**-5,2473**	**-0,2491**

- Beobachtungen:
  - Für V@R und RV@R kann das Verlustrisiko signifikant reduziert werden durch optimale Kapitaltransfers, die das Verlustrisiko verstecken.
    - Für n hinreichend groß, $\square_{i=1}^{n} \rho^{i}(E_1(\delta)) = -\operatorname{ess\,sup} E_1(\delta) = -66,2512$.
    - Dies erfordert $n \cdot \alpha \geq 1$ für V@R_{α}. Für $\text{V@R}_{0,1}$ ist diese Bedingung bereits für $n \geq 10$ erfüllt und die Fallstudie spiegelt dieses Ergebnis wider.
  - Für das kohärente Risikomaß AV@R reduziert optimale Risikoteilung im Gegensatz dazu nicht das Risikokapital.

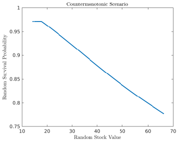
Stochastische Liabilities

- Erweiterung des Basis-ALM-Modells um zufällige Liabilities
- Notation:
  - $L > 0$ Versicherungsleistung im Erlebensfall
  - p_x^* einjährige kalkulatorische Überlebenswahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person
  - p_x einjährige zufällige Überlebenswahrscheinlichkeit für eine x-jährige versicherte Person
- Annahme: p_x^* ist der beste Schätzwert der zufälligen Überlebenswahrscheinlichkeit, d. h. $\mathbb{E}[p_x] = p_x^*$.
- Liabilities: $\pi = L \cdot p_x^*$, $L_1 = L \cdot p_x = \frac{p_x}{p_x^*}\pi$
- Eigenmittel des Netzwerks in $t = 1$:

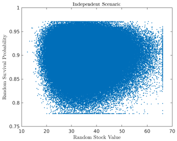
$$E_1(\delta) = \eta^1(\delta) + \eta^2(\delta)A_1^2 - L_1 = \eta^1(\delta) + \eta^2(\delta)A_1^2 - \frac{p_x}{p_x^*}\pi$$

- Parametrisierung:
  - $L = 100$, $p_x^* = 0,9$, $p_x \sim \text{Beta}(90, 10)$, d. h. $\mathbb{E}[p_x] = p_x^* = 0,9$, $\mathbb{E}[L_1] = \pi = L_0$.
  - Asset-Allokation: $\delta^1 = 0,8382$, $\delta^2 = 0,1618$ (kalibriert, sodass für eine Einzelgesellschaft und unabhängige Assets und Liabilities $\text{V@R}_\alpha(E_1(\delta))$ mit dem Basismodell übereinstimmt)

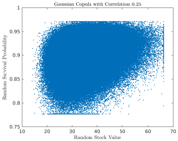
Stochastische Liabilities - Abhängigkeiten



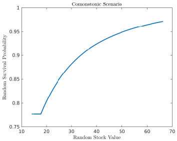
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) Countermonotonie

(b) Unabhängigkeit

(c) Gauß-Copula mit Korrelation 0,25

(d) Komonotonie

Motivation:

- Illustration der Wirkung extremer Abhängigkeiten auf die Risikoteilung; Gauß-Copula im Einklang mit der Spezifikation der SII-Standardformel
- Countermonotone Assets und Liabilities sind problematisch, da hohe Versicherungsleistungen mit niedrigen Asset-Werten zusammenfallen und somit zu geringen Eigenmitteln führen.

Stochastische Liabilities und optimale Risikoteilung

(a) Countermonotonie für Assets und Liabilities:

	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{V@R}^{l}_{\alpha}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{AV@R}^{l}_{\beta}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{RV@R}^{l}_{\gamma,\epsilon}\,(E_1(\delta))$
$n = 1$	**-24,1537**	**-24,3001**	**-24,1789**
$n = 5$	**-32,5189**	**-24,3001**	**-28,8983**
$n = 10$	**-65,7126**	**-24,3001**	**-33,5348**

(b) Unabhängigkeit für Assets und Liabilities:

	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{V@R}^{l}_{\alpha}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{AV@R}^{l}_{\beta}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{RV@R}^{l}_{\gamma,\epsilon}\,(E_1(\delta))$
$n = 1$	**-26,5578**	**-26,6353**	**-26,5684**
$n = 5$	**-32,8451**	**-26,6353**	**-30,1805**
$n = 10$	**-65,7126**	**-26,6353**	**-33,5769**

(c) Gauß-Copula mit Korrelation 0,25:

	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{V@R}^{l}_{\alpha}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{AV@R}^{l}_{\beta}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{RV@R}^{l}_{\gamma,\epsilon}\,(E_1(\delta))$
$n = 1$	**-27,3255**	**-27,3935**	**-27,3377**
$n = 5$	**-32,9015**	**-27,3935**	**-30,5547**
$n = 10$	**-64,0618**	**-27,3935**	**-33,5492**

(d) Komonotonie für Assets und Liabilities:

	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{V@R}^{l}_{\alpha}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{AV@R}^{l}_{\beta}\,(E_1(\delta))$	$\square_{i=1}^{n} \mathrm{RV@R}^{l}_{\gamma,\epsilon}\,(E_1(\delta))$
$n = 1$	**-31,7546**	**-31,7879**	**-31,7601**
$n = 5$	**-32,5588**	**-31,7879**	**-32,0290**
$n = 10$	**-46,2791**	**-31,7879**	**-32,7668**

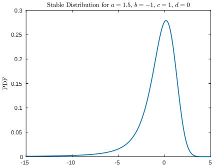
- Beobachtungen:
  - Für nur eine Gesellschaft ($n = 1$) und für alle drei Risikomaße V@R, AV@R and RV@R reflektiert $\rho(E_1(\delta))$ die Gefährlichkeit der verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen.
  - Für Risikomaße vom V@R-Typ hat die Risikoteilung stärkere Effekte für gefährlichere Abhängigkeitsstrukturen.

Asset mit linksschiefer Verteilung

- Erweiterung des Basis-ALM-Modells um ein drittes Asset mit linksschiefer-Verteilung

$$A_t^3 = A_0^3 \exp(\zeta t) + Z - \mathbb{E}[Z], \quad t \in (0,1],$$

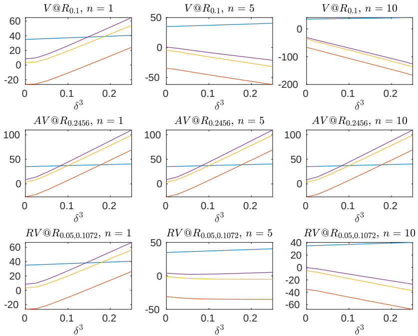
wobei der Startwert $A_0^3 > 0$ konstant ist, $\zeta > 0$ eine exponentielle Wachstumsrate darstellt und Z eine Zufallsvariable mit „stable distribution“ $\mathcal{S}(a,b,c,d)$ ist.



- Dieses Asset ist charakterisiert durch eine schiefe Verteilung und ein im Vergleich zur Aktie höheres Verlustrisiko.
- Parametrisierung:
  - $A_0^3 = 1$, $\zeta = 0.3$, $Z \sim \mathcal{S}(1.5, -1, 1, 0)$ unabhängig von $(A_t^2)_{t\in[0,1]}$
  - Beachte, dass $\mathbb{E}[A_1^3/A_0^3] \approx \exp(\zeta) > \exp(\mu) \approx \mathbb{E}[A_1^2/A_0^2]$ für die Parameter $\zeta = 0,3$ and $\mu = 0,1542$, d. h. die erwartete Rendite des linksschiefen Assets übersteigt die erwartete Rendite der Aktie, als Kompensation für das höhere Risiko.

Optimierung der Asset-Allokation

- Der Anteil $\delta^1 = 0,75$ im Sparbuch wird fixiert und der Anteil δ^3, der auf das linksschiefe Asset entfällt, wird im Bereich $[0; 0,25]$ variiert.



- $\mathbb{E}[E_1(\delta)]$ in blau
- $\square_{i=1}^{n} \rho^i\left(E_1(\delta)\right)$ in rot
- $\square_{i=1}^{n} \mathrm{SCR}^i_{\mathcal{A}}\left(E_1(\delta)\right)$ in gelb
- $\square_{i=1}^{n} \mathrm{SCR}^i_{\mathrm{mean}}\left(E_1(\delta)\right)$ in lila

- Beobachtungen:
  - Für $n = 1$ zeigen alle drei Risikomaße, dass Investments in das left-tailed Asset das Risiko erhöhen, im Einklang mit dem wahren Risikoprofil.
  - Falls n groß ist, sind Assets mit einem fetten linken Tail besonders attraktiv für Risikomaße vom V@R-Typ, da das Risiko besonders gut versteckt werden kann.

Zusammenfassung

- Erfolgt die Risikomessung für Netzwerke mit Risikomaßen vom V@R-Typ, so kann das Verlustrisiko des Netzwerks mit geeigneten Kapitaltransfers versteckt werden.
- Ist die Anzahl der Einzelgesellschaften n hinreichend groß, so kann das Netzwerk eine optimale Kapitalallokation vornehmen, sodass das optimale Risiko des Netzwerks $\square_{i=1}^{n} \rho^{i}(E_1)$ mit $-\operatorname{ess\,sup} E_1$ (best case) übereinstimmt.
- Fallstudien zeigen, dass Risikomaße vom V@R-Typ Anreize für riskantes ALM-Management setzen, d. h. – aus Sicht der Aufsicht – für Risikomismanagement.
- Basiert im Gegensatz dazu Risikomanagement auf dem kohärenten Risikomaß Average Value at Risk, so kann Risiko nicht versteckt werden und es werden keine falschen Anreize gesetzt.

Ausgewählte Referenzen

Asimit, A. V., A. M. Badescu & Tsanakas, A. (2013): Optimal Risk Transfers in Insurance Groups, *European Actuarial Journal* 3(1), 159-190.

Embrechts, P., H. Liu & Wang, R. (2018): Quantile-Based Risk Sharing, *Operations Research* 66(4), 936-949.

Hamm, A.-M., Knispel, T. & Weber, S, (2019): Optimal Risk Sharing in Insurance Networks An Application to Asset-Liability Management.

Weber, S. (2018): Solvency II, or How to Sweep the Downside Risk Under the Carpet, *Insurance: Mathematics and Economics* 82, 191-200.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Prof. Dr. Thomas Knispel, Aktuar DAV
Berlin School of Economics and Law
Badensche Straße 52
10825 Berlin, Germany
E-Mail: thomas.knispel@hwr-berlin.de

Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law